

Vorname	Name	Matrikel-Nr.	Note

**Wichtige Hinweise!** Bitte vor Beginn der Arbeit lesen:

- ① Außer Schreibzeug dürfen Sie nur einen nicht programmierbaren Taschenrechner benutzen.
- ② Tragen Sie alle **Lösungen auf diesem Blatt ein**.
- ③ Am Ende **geben Sie nur dieses Blatt ab!**
- ④ In den Aufgaben 2 und 4 werden **falsch angekreuzte Fragen negativ** gewertet, in den Aufgaben 3, 6, 7 (3. Teil) und 9 **doppelt** negativ. Wenn Sie sich nicht sicher sind, lassen Sie die Kästchen also lieber leer. Ergibt sich für eine Aufgabe eine negative Punktzahl, so wird die Aufgabe mit 0 bewertet.
- ⑤ Skizzieren Sie Ihre Aufgabenlösungen zunächst auf **Konzeptpapier**. Verwenden Sie beim Übertragen einen **Bleistift**, um noch korrigieren zu können!

**Prüfungsordnung bitte ankreuzen:**

Wirtschaftswinf.  
 Lehramt

**Alle übrigen:**

Bachelor  
 DPO 2006  
 DPO 2003

Ergebnisse ab 24.03. unter [www.math.uni-siegen.de/ring](http://www.math.uni-siegen.de/ring)

**1. Siehe Hinweis ⑤** 10 Punkte

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt:

$$(2n)! \geq 2^n \cdot n!$$

Entwickeln Sie Ihren Beweis zunächst auf Konzeptpapier und tragen Sie ihn dann hier ein:

**Induktionsanfang:**

**Induktionsschritt**

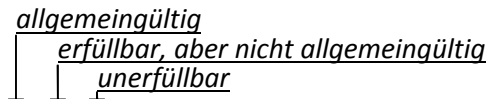
- Voraussetzung:

- Behauptung:

- Beweis:

**2. Siehe Hinweis ④** [6 Punkte]

Kreuzen Sie für jede der aussagenlogischen Formeln die zutreffenden Eigenschaften an:



- $a \vee \neg a \vee b$
- $a \wedge (\neg a \vee a)$
- $(a \wedge b) \vee \neg a \vee \neg b$
- $(a \wedge b) \rightarrow (a \vee b)$
- $(a \wedge b) \leftrightarrow \neg(\neg a \vee \neg b)$
- $(a \rightarrow b) \vee a$

**3. Siehe Hinweis ④** [6 Punkte]

Es sei  $A = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}$  und  $B = \{36n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Welche der folgenden Aussagen treffen zu:

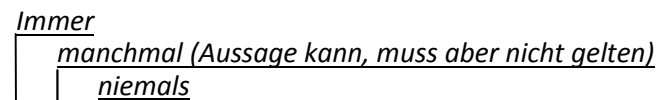
**Ja Nein**

- $B \setminus A = \emptyset$
- $A \subseteq B$
- $A \cup B \subseteq A$
- $(30, 30) \in A \times B$
- $\{6, 36\} \in A \times B$
- $\emptyset \in A \times B$
- $\emptyset \subseteq A \times B$
- Es gibt (mindestens) eine injektive Abbildung von  $A$  nach  $B$ .
- Es gibt (mindestens) eine surjektive Abbildung von  $A$  nach  $B$ .
- $\emptyset = \{\emptyset\}$

**4. Siehe Hinweis ④** [6 Punkte]

$E$  und  $F$  seien endliche Mengen,  $U$  und  $V$  unendliche Mengen mit  $|E| = |F|$  und  $|U| = |V|$ .

Kreuzen Sie an, welche Aussagen wann gelten:



- $|A \cup B| > |A \cap B|$
- $|A \setminus B| = |B \setminus A|$
- $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$
- Jede injektive Abbildung von  $E$  nach  $F$  ist surjektiv.
- Jede injektive Abbildung von  $U$  nach  $V$  ist surjektiv.
- Es gibt eine injektive Abbildung von  $U$  nach  $E$ .

**5.** [6 Punkte]

Stellen Sie Ihre Matrikelnummer in den Stellenwertsystemen zur Basis 11 und 121 dar (Stellen ab 10 bitte als umringelte Dezimalzahlen schreiben!)

Füllen Sie die Kästen aus:

Meine Matrikelnummer zur Basis 11:

Meine Matrikelnummer zur Basis 121:

**6. Siehe Hinweis ④**

[6 Punkte]

Die Relation  $R$  auf  $\mathbb{R}$  sei definiert durch:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$

Welche der folgenden Aussagen treffen zu:

**Ja** **Nein**   $R$  ist reflexiv**Ja** **Nein**   $R$  ist symmetrisch   $R$  ist transitiv   $R$  ist antisymmetrisch   $R$  ist Äquivalenzrel.    $R$  ist Halbordnung**7. Siehe Hinweis ④**

[6 Punkte]

Der größte gemeinsame Teiler

der Zahlen 1407406 und 60610 ist 

Gegeben seien die Mengen

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 20000\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 100 = 50\}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 99 = 77\}$$

Füllen Sie den Kasten aus:

$$A \cap B \cap C = \text{$$

**Ja** **Nein**  Zu je zwei Primzahlen  $p$  und  $q$  gibt es ganze Zahlen  $a$  und  $b$ , so dass  $ap + bq = 1$   Die Gleichung  $210x + 220y = 10$  hat ganzzahlige Lösungen.  Die Gleichung  $7x = 1$  hat in  $\mathbb{Z}_{17}$  eine Lösung.Eine Lösung der Gleichung  $7x = 1$  in  $\mathbb{Z}_{11}$  ist In  $\mathbb{Z}_{14}$  haben  Elemente ein multiplikatives Inverses.In  $\mathbb{Z}_{13}$  haben  Elemente ein multiplikatives Inverses.**8.**

6 Punkte

 $f(x) = x^5 + x^4 + 1$  und  $g(x) = x^4 + x^2 + 1$  seien Polynome in  $\mathbb{Z}_2[x]$ .

$$f(x) + g(x) = \text{$$

$$f(x) \cdot g(x) = \text{$$

$$f(x) \bmod g(x) = \text{$$

$$\text{ggT}(f(x), g(x)) = \text{$$

**9. Siehe Hinweis ④**

[6 Punkte]

 $p$  und  $q$  seien Primzahlen.Welche Aussagen gelten in jedem Fall:**Ja** **Nein**   $pq - 1$  ist eine Primzahl.   $pq + 1$  hat weder  $p$  noch  $q$  als Primfaktor.   $pq + 1$  ist eine Primzahl.   $pq + 2$  hat weder  $p$  noch  $q$  als Primfaktor.**10.**

[6 Punkte]

Füllen Sie die Kästen aus:

$$(a) \quad 2^{100} - \sum_{k=0}^{98} \binom{100}{k} = \text{$$

(b) Die Menge  $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ hat  verschiedene Teilmengen mit genau 3 Elementen.Davon enthalten  genau eine Primzahl.**11.**

[6 Punkte]

Ermitteln Sie die erzeugende Funktion  $f(x)$  der Rekurrenz:

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 4, \quad a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

$$f(x) = \text{_____}$$

**12.**

6 Punkte

Füllen Sie die Kästen aus:

Von den natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 715

... sind  durch 5 oder 11 teilbar,... sind  durch 5 oder 13 teilbar,... sind  durch 11 oder 13 teilbar,... sind  durch 5 oder 11 oder 13 teilbar,... sind  weder durch 2 noch durch 11 teilbar.*Hinweis:*  $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$ **13.**

6 Punkte

Ergebnisse bitte als **Formel** ausdrücke eintragen, dabei Brüche, Fakultäten und Binomialkoeffizienten **nicht ausrechnen!**(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen von drei Würfeln die Summe der gewürfelten Zahlen 17 ist, beträgt .(b) In einer Tüte befinden sich 9 Bonbons, davon je 3 rote, gelbe und grüne. Es werden zufällig drei Bonbons herausgenommen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei alle drei Farben zu bekommen, ist .(c) 6 Personen fahren in einem 8-sitzigen Kleinbus. 3 der 6 Personen besitzen einen Führerschein. Es gibt  mögliche Sitzordnungen.(d) Es gibt  verschiedene zehnstellige Zahlen, in denen 1 mal die Ziffer 1 vorkommt, 2 mal die Ziffer 2, 3 mal die Ziffer 3 und 4 mal die Ziffer 4.