Klausur zur Vorlesung **Diskrete Mathematik für Informatiker** 03.03.2010, 09.00 - 11.00 Uhr

Vorname	Name	Matrikel-Nr.	Note

Wichtige Hinweise! Bitte vor Beginn der Arbeit lesen:

① Außer Schreibzeug dürfen Sie nur einen nicht programmierbaren Taschenrechner benutzen.

② Tragen Sie alle **Lösungen auf diesem Blatt ein**.

③ Am Ende **geben Sie nur dieses Blatt ab**!

④ In den Aufgaben 2 und 4 werden **falsch angekreuzte Fragen negativ** gewertet, in den Aufgaben 3, 6, 7 (3. Teil) und 9 **doppelt** negativ. Wenn Sie sich nicht sicher sind, lassen Sie die Kästchen also lieber leer. Ergibt sich für eine Aufgabe eine negative Punktsumme, so wird die Aufgabe mit 0 bewertet.

⑤ Skizzieren Sie Ihre Aufgabenlösungen zunächst auf **Konzeptpapier**. Verwenden Sie beim Übertragen einen **Bleistift**, um noch korrigieren zu können!

Ergebnisse ab 24.03. unter www.math.uni-siegen.de/ring

Prüfungsordnung bitte ankreuzen:
☐ Wirtschaftsinf.
☐ Lehramt
Alle übrigen:
☐ Bachelor
☐ DPO 2006
☐ DPO 2003

1. Siehe Hinweis ⑤ 10 Punkte

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$(2n)! \geq 2^n \cdot n!$$

Entwickeln Sie Ihren Beweis zunächst auf Konzeptpapier und tragen Sie ihn dann hier ein:

Induktionsanfang:

Induktionsschritt

- Voraussetzung:

- Behauptung:

- Beweis:

2. Siehe Hinweis ④ [6 Punkte]

Kreuzen Sie für jede der aussagenlogischen Formeln die zutreffenden Eigenschaften an:

allgemeingültig
erfüllbar, aber nicht allgemeingültig
unerfüllbar

☐ ☐ ☐ $a \vee \neg a \vee b$
☐ ☐ ☐ $a \wedge (\neg a \vee a)$
☐ ☐ ☐ $(a \wedge b) \vee \neg a \vee \neg b$
☐ ☐ ☐ $(a \wedge b) \rightarrow (a \vee b)$
☐ ☐ ☐ $(a \wedge b) \leftrightarrow \neg(\neg a \vee \neg b)$
☐ ☐ ☐ $(a \rightarrow b) \vee a$

3. Siehe Hinweis ④ [6 Punkte]

Es sei $A = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{36n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Welche der folgenden Aussagen treffen zu:

Ja Nein

☐ ☐ $B \setminus A = \emptyset$
☐ ☐ $A \subseteq B$
☐ ☐ $A \cup B \subseteq A$
☐ ☐ $(30, 30) \in A \times B$
☐ ☐ $\{6, 36\} \in A \times B$
☐ ☐ $\emptyset \in A \times B$
☐ ☐ $\emptyset \subseteq A \times B$
☐ ☐ Es gibt (mindestens) eine injektive Abbildung von A nach B.
☐ ☐ Es gibt (mindestens) eine surjektive Abbildung von A nach B.
☐ ☐ $\emptyset = \{\emptyset\}$

4. Siehe Hinweis ④ [6 Punkte]

E und F seien endliche Mengen, U und V unendliche Mengen mit $|E| = |F|$ und $|U| = |V|$.
Kreuzen Sie an, welche Aussagen wann gelten:

Immer
manchmal (Aussage kann, muss aber nicht gelten)
niemals

☐ ☐ ☐ $|A \cup B| > |A \cap B|$
☐ ☐ ☐ $|A \setminus B| = |B \setminus A|$
☐ ☐ ☐ $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$
☐ ☐ ☐ Jede injektive Abbildung von E nach F ist surjektiv.
☐ ☐ ☐ Jede injektive Abbildung von U nach V ist surjektiv.
☐ ☐ ☐ Es gibt eine injektive Abbildung von U nach E.

5. [6 Punkte]

Stellen Sie Ihre Matrikelnummer in den Stellenwertsystemen zur Basis 11 und 121 dar (Stellen ab 10 bitte als umkringelte Dezimalzahlen schreiben!)

Füllen Sie die Kästen aus:

Meine Matrikelnummer zur Basis 11: ☐

Meine Matrikelnummer zur Basis 121: ☐

Bitte wenden!

6. Siehe Hinweis ④ [6 Punkte]

Die Relation R auf $\mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$

Welche der folgenden Aussagen treffen zu:

Ja Nein
☐ ☐ R ist reflexiv
☐ ☐ R ist transitiv
☐ ☐ R ist Äquivalenzrel.

Ja Nein
☐ ☐ R ist symmetrisch
☐ ☐ R ist antisymmetrisch
☐ ☐ R ist Halbordnung

7. Siehe Hinweis ④ [6 Punkte]

Der größte gemeinsame Teiler

der Zahlen 1407406 und 60610 ist ☐

Gegeben seien die Mengen

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 20000\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 100 = 50\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 99 = 77\}$$

Füllen Sie den Kasten aus:

$A \cap B \cap C =$ ☐

Ja Nein
☐ ☐ Zu je zwei Primzahlen p und q gibt es ganze Zahlen a und b, so dass $ap + bq = 1$
☐ ☐ Die Gleichung $210\,x + 220\,y = 10$ hat ganzzahlige Lösungen.
☐ ☐ Die Gleichung $7x = 1$ hat in $\mathbb{Z}_{17}$ eine Lösung.

Eine Lösung der Gleichung $7x = 1$ in $\mathbb{Z}_{11}$ ist ☐

In $\mathbb{Z}_{14}$ haben ☐ Elemente ein multiplikatives Inverses.

In $\mathbb{Z}_{13}$ haben ☐ Elemente ein multiplikatives Inverses.

8. 6 Punkte

$f(x) = x^5 + x^4 + 1$ und $g(x) = x^4 + x^2 + 1$ seien Polynome in $\mathbb{Z}_2[x]$.

$f(x) + g(x) =$ ☐

$f(x) \cdot g(x) =$ ☐

$f(x) \bmod g(x) =$ ☐

$\mathrm{ggT}(f(x), g(x)) =$ ☐

9. Siehe Hinweis ④ [6 Punkte]

p und q seien Primzahlen.

<u>*Welche Aussagen gelten in jedem Fall*</u>:

Ja Nein
☐☐ $p\,q - 1$ ist eine Primzahl.
☐☐ $p\,q + 1$ hat weder p noch q als Primfaktor.
☐☐ $p\,q + 1$ ist eine Primzahl.
☐☐ $p\,q + 2$ hat weder p noch q als Primfaktor.

10. [6 Punkte]

Füllen Sie die Kästen aus:

(a) $2^{100} - \sum_{k=0}^{98} \binom{100}{k} =$ ☐

(b) Die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ hat ☐ verschiedene Teilmengen mit genau 3 Elementen.
Davon enthalten ☐ genau eine Primzahl.

11. [6 Punkte]

Ermitteln Sie die erzeugende Funktion $f(x)$ der Rekurrenz:

$a_0 = 3,\ a_1 = 4,\ a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2}$ für $n \geq 2$.

$f(x) =$ ______

12. 6 Punkte

Füllen Sie die Kästen aus:

Von den natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 715

... sind ☐ durch 5 oder 11 teilbar,

... sind ☐ durch 5 oder 13 teilbar,

... sind ☐ durch 11 oder 13 teilbar,

... sind ☐ durch 5 oder 11 oder 13 teilbar,

... sind ☐ weder durch 2 noch durch 11 teilbar.

Hinweis: $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$

13. 6 Punkte

*Ergebnisse bitte als **Formelausdrücke** eintragen, dabei Brüche, Fakultäten und Binomialkoeffizienten **nicht ausrechnen**!*

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen von drei Würfeln die Summe der gewürfelten Zahlen 17 ist, beträgt ☐.

(b) In einer Tüte befinden sich 9 Bonbons, davon je 3 rote, gelbe und grüne. Es werden zufällig drei Bonbons herausgenommen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei alle drei Farben zu bekommen, ist ☐.

(c) 6 Personen fahren in einem 8-sitzigen Kleinbus. 3 der 6 Personen besitzen einen Führerschein.
Es gibt ☐ mögliche Sitzordnungen.

(d) Es gibt ☐ verschiedene zehnstellige Zahlen, in denen 1 mal die Ziffer 1 vorkommt, 2 mal die Ziffer 2, 3 mal die Ziffer 3 und 4 mal die Ziffer 4.